**Глава 10. Финансовые вычисления**

**Тема 10.1 Основы финансовых вычислений**

**Простой процент (Номинальная ставка)**

Для определения будущей стоимости при начислении простого процента (в последующие годы проценты начисляются только на сумму первоначального вклада, а не на полученные проценты) используется формула

**FV = PV \*(1 + n r) (1)**

Если при начислении **простого** процента **ставка процента различается по годам**, то

**FV = PV \*(1 + r1 + r2 + … + rn)** **(2)**

**Сложный процент (Эффективная ставка)**

Для определения будущей стоимости при начислении сложного процента (в последующие годы проценты начисляются не только на сумму первоначального вклада, но и на полученные проценты) используется формула

**FV = PV \*(1 + r)n  (3)**

Если при начислении сложного процента ставка процента различается по годам, то

**FV = PV \*((1 + r1) (1 + r2)\*…\* (1 + rn))** **(4)**

**(1 + rгод) = (1 + rп/год)2 = (1 + rкв)4 = (1 + rмес)12 (5)**

Начисление % при дробном числе периодов (b – дробная часть периода)

**FV = PV \*(1 + r)n \*(1 + b\*r) (6)**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **FV** | **FV** | Будущая стоимость |
| **PV** | **PV** | Настоящая (текущая) стоимость |
| **r** | **r** | Ставка процента, выраженная в долях единицы, под которую размещается настоящая (текущая) стоимость |
| **n** | **n** | Число периодов начисления процента по ставке r |
| **1 / (1 + n r)** | **1 / (1 + r)n** | Коэффициент дисконтирования |
| **(1 + n r)** | **(1 + r)n** | Коэффициент наращения |

***Примеры***

*Инвестор вложил 15 000 руб. сроком на 5 лет на депозит в банке, который начисляет 12% по вкладу. В конце каждого года инвестор снимает со счета начисленную сумму очередного процента. Какую величину составит общая сумма вклада и начисленных в течение 5 лет процентных платежей?*

*Формула 1. Решение: FV = 15 000 \* (1 + 0,12 \*5) = 24 000*

*Вкладчик разместил деньги на счет в банке сроком на два года. По окончании срока он получил по счету 13 200 руб. Начисление процентов происходило по схеме простого процента в конце каждого квартала по ставке 16% годовых. Рассчитайте первоначальную сумму вклада.*

*Формула 1. Решение: PV = 13 200 / (1 + 0,16 \* 2) = 10 000*

*Инвестор открывает в банке депозит на 90 дней под 10% годовых и хотел бы в конце периода получить по депозиту 10 тыс.руб. Какую сумму ему следует разместить сегодня на счете? База 365 дней.*

*Формула 1. Решение: PV = 10 000 / (1 + 0,1 \* 90 / 365) = 9 759,36*

*Инвестор открывает в банке депозит под 10% годовых (простой процент) на сумму 10 тыс. руб. и хотел бы получить по счету 10,5 тыс. руб. На сколько дней следует открыть депозит? База 360 дней.*

*Формула 1. Решение: 10,5 = 10 \* (1 + X / 360 \* 0,1) => X = 180*

*Вкладчик разместил на счете в банке 10 000 руб. и получил через 180 дней 10 540 руб. По счету начислялся простой процент. Определить доходность его операции в расчете на год на основе простого процента. Финансовый год равен 365 дням.*

*Формула 1. Решение: 10 540 = 10 000 \* (1 + r \* 180 / 365) => r = (10 540 / 10 000 – 1) \* 365 / 180 = 0,1095 (10,95%)*

*Вкладчик положил в банк 20 000 руб. в начале 2010 г. Банк начислял простые проценты. В предположении, что вкладчик не снимал денег со своего счета, определите процентную ставку банка, если в начале 2015 г. на счете вкладчика было в 2 раза больше денег, чем первоначально вложенная сумма*

*Формула 1. Решение: 2 = 1 + r \* 5 => r = 0,2 (20%)*

*Вкладчик положил в банк 10 000 руб. в начале 2009 г. Банк выплачивал простые проценты с процентными ставками на уровне: 100% от ставки рефинансирования Банка России в 2009 г., 90% от ставки рефинансирования Банка России – в 2010 г. и 80% от ставки рефинансирования Банка России – в 2011 г. Будем считать, что ставка рефинансирования Банка России была следующей: в 2009 г. - 12% годовых; 2010 г. - 9% годовых; 2011 г. – 8% годовых. В предположении, что вкладчик не снимал денег со своего счета, определите, какая сумма была на его счете* ***в начале 2012*** *г.*

*Формула 2. Решение: FV = 10 000 \* (1 + 1 \* 0,12 + 0,9 \* 0,09 + 0,8 \* 0,08) = 12 650*

*Вкладчик положил в банк некоторую сумму в начале 2009 г. Банк выплачивал простые проценты по следующим процентным ставкам: 2009 г. - 90% от ставки рефинансирования Банка России; 2010 г. - 80% от ставки рефинансирования Банка России; 2011 г. - 70% от ставки рефинансирования Банка России. В предположении, что вкладчик не снимал денег со своего счета, определите, какую сумму он положил в банк, если на его счете в конце 2011 г. было 37 080 руб. Для ставки Банка России принять следующие значения: 2009 г. - 12%; 2010 г. - 9%; 2011 г. - 8%.*

*Формула 2. Решение: PV = 37 080 / (1 + 0,9 \* 0,12 + 0,8 \* 0,09 + 0,7 \* 0,08) = 30 000*

*Вкладчик положил в банк некоторую сумму в начале года. Банк начислял простые проценты, причем процентная ставка за второй год была в полтора раза выше, чем за первый. В предположении, что вкладчик не снимал денег со своего счета, определите процентную ставку за второй год, если в начале третьего года на счете вкладчика была сумма, в 1,3 раза превышающая первоначальную.*

*Формула 2. Решение: Пусть X – ставка первого года, тогда: 1,3 = 1 + X + 1,5 \* X =>*

*X = (1,3 – 1) / (1 + 1,5) = 0,12. Следовательно, ставка второго года 0,4 \* 1,5 = 0,18 (18%)*

*Вкладчик положил в банк 20 000 руб. Банк выплачивает 9% годовых. Проценты сложные. Какая сумма будет на счете у вкладчика через два года?*

*Формула 3. Решение: FV = 20 000 \* (1 + 0,09)2 = 23 762*

*Банк предлагает три годичных депозита: 1) ставка 10% годовых, начисление процента по завершении года; 2) ставка 9,9%, капитализация процентов осуществляется ежеквартально; 3) ставка 9,8%, капитализация процентов осуществляется ежемесячно. Определить, какой депозит следует выбрать инвестору, если он планирует разместить деньги в банке на один год.*

*Формула 3. Решение: Сравним коэффициенты наращения*

*1) 1 + 0,1 = 1,1 2) (1 + 0,099 / 4)4 = 1,1027 3) (1 + 0,098 / 12)12 = 1,1025*

*Наибольший коэффициент наращения у* ***второго*** *депозита.*

*Инвестор открывает в банке депозит на два года под 10% годовых и хотел бы в конце периода получить по депозиту 10 тыс.руб. Банк начисляет проценты ежеквартально. Какую сумму ему следует разместить сегодня на счете.*

*Формула 3. Решение: PV = 10 000 / (1 + 0,1 / 4)4 \* 2 = 8 207,47*

*Банк выплатил за первый год проценты по ставке Сбербанка, а за второй год – на 10% ниже, чем в Сбербанке. Проценты сложные. Какую минимальную сумму требуется разместить вкладчику в банке, чтобы через 2 года его вклад был не менее 12 000 руб., если ставка Сбербанка все два года была равна 12% годовых?*

*Формула 4. Решение: PV = 12 000 / ((1 + 0,12) \* (1 + 0,12 \* 0,9)) = 9 669,9*

*Банк выплачивает сложные проценты. Вкладчик разместил в банке 15 000 руб. Сколько лет потребуется вкладчику для того, чтобы его вклад достиг 21 600 руб., если банк выплачивает 20% годовых?*

*Формула 3. Решение: 21 600 = 15 000 \* (1 + 0,2)n => n = Log1,2 (21 600 / 15 000) = 2.*

*Инвестор разместил деньги на банковском депозите на восемь лет. Капитализация процентов осуществлялась ежегодно. Какую ставку по депозиту начислял банк, если в конце периода капитал вкладчика увеличился в четыре раза?*

*Формула 3. Решение: 4 = (1 + r)8 => r = 8√ 4 – 1 = 0,1892 (18,92%)*

*По вкладу в банке ежеквартально начисляется 3% от суммы вклада. Найдите годовую доходность с учетом ежеквартального реинвестирования дохода.*

*Формула 5. Решение: (1 + r) = (1 + 0,03)4 => r = 1,034 – 1 = 12,55 (12,6%)*

*Вкладчик инвестировал 10 000 руб. и получил через 2 года 50 000 руб. Капитализация процентов осуществлялась ежеквартально. Определить эффективную годовую доходность по вкладу.*

*Формула 3, 5. Решение: 50 000 = 10 000 \* (1 + r )2 \* 4 => r (квартальная ставка= (8√ 5 – 1) \* = 0,2228*

*rэ = (1 + 0,2228)4 – 1 = 1,2361 (123,6%)*

*Банк А выплачивает сложные проценты раз в полгода. Банк Б выплачивает 15% годовых по простой процентной ставке. Вкладчик разместил по 10 000 руб. в банках А и Б сроком на 2 года. Какую полугодовую процентную ставку должен начислять банк А, чтобы у вкладчика по итогам 2-х лет сумма вклада в банке А была на 10% больше, чем в банке Б?*

*Формулы 3 и 1. Решение:*

*Коэффициент наращения банка А = (1 + r)4*

*Коэффициент наращения банка Б = (1 + 2 \* 0,15) = 1,3*

*Раз сумма в банке А больше на 10%, чем в банке Б, значит коэффициент наращения банка А на 10% больше, так как в банках размещали одинаковые суммы.*

*(1 + r)4 = 1,1 \* 1,3 => r = 4√(1,1 \* 1,3) – 1 = 0,0935 (9,35%)*

*За 30 дней до окончания года вкладчик размещает в банке 2 000 руб. под 8% годовых. Банк осуществляет капитализацию процентов в конце каждого года. В течение года по счету начисляется простой процент. Какая сумма денег получится на счете через 3 года и 120 дней? База 365 дней.*

*Формула 6. Решение: FV = 2 000 \* (1 + 0,08 \* 30 /365) \* (1 + 0,08)3 \* (1 + 0,08 \* 90 / 365) = 2 586,02*

**Тема 10.2 Оценка доходности ценных бумаг**

**Коэффициент Р/Е** - характеризует отношение рыночной цены к доходу на акцию

**Коэффициент Р/S** - характеризует отношение рыночной цены к выручке

**Коэффициент Р/BV** - характеризует отношение рыночной цены к стоимости чистых активов

***Пример****. В отчетном периоде выручка компании составила 100 млн. руб., чистая прибыль – 8 млн. руб., стоимость чистых активов – 64 млн. руб. Рыночная капитализация компании равна 96 млн. руб. Определить коэффициенты (мультипликаторы): Р/Е, Р/S, Р/BV.*

*P/E = 96 / 8 = 12*

*P/S = 96 / 100 = 0,96*

*P/BV = 96 / 64 = 1,5*

***Пример****. Обыкновенная именная акция имеет рыночную стоимость 110 руб. Доход (прибыль) на акцию по итогам года составил 15 руб. Определите значение коэффициента Р/Е.*

*P/E = 110 / 15 = 7,33*

**EPS = (Прибыль - Дивиденды по привилегир. – налог на прибыль) / Кол-во обыкновен.**

***Пример****. Уставный капитал компании составляют 100 тыс. обыкновенных и 50 тыс. привилегированных акций. Прибыль компании до уплаты налогов равна 7 млн. руб., а величина налога на прибыль - 2 млн. руб. Величина дивиденда по привилегированным акциям составляет 3 руб. Рассчитайте значение показателя ЕРS (доход на одну акцию).*

*EPS = (7млн. – 2млн. – 0,05млн. \* 3) / 0,1млн. = 48,5руб.*

***Пример****. Уставный капитал компании составляет 400 тыс. руб. Продано всего 1600 акций, в том числе 1300 акций обыкновенных и 300 акций привилегированных с одним и тем же номиналом. Общая сумма чистой прибыли, подлежащая распределению в виде дивидендов, 40 тыс. руб. По привилегированным акциям фиксированная ставка дивиденда утверждена в размере 10% от номинала. Рассчитать сумму дивиденда на обыкновенную акцию.*

*Номинал одной акции = 400 000 / 1 600 = 250руб.*

*EPS = (40 000 – 250 \* 0,1 \* 300) / 1 300 = 25руб.*

***Пример****. Акционерное общество выпустило 1 300 000 шт. акций. Прибыль общества после уплаты всех налогов и расходов составляет 6 850 000 руб. Собрание акционеров приняло решение выплатить дивиденды из расчета 2 руб. на акцию. Определите величину нераспределенной прибыли на акцию.*

*Для решения от прибыли вычитаем выплаченные дивиденды и делим на количество акций*

*Нераспределенная прибыль на акцию = (6 850 000 – 1 300 000\*2) / 1 300 000 = 3,27руб.*

**Дивидендная доходность (%) = (Годовой дивиденд / Текущая цена) х 100.**

***Пример****. Номинал обыкновенных акций компании составляет 30 руб., величина дохода на одну акцию и дивиденд составляет 70 руб. и 40 руб., соответственно, рыночная цена и балансовая стоимость акции равна 170 руб. и 600 руб., соответственно, а величина денежного потока на акцию составляет 90 руб. Какими будут значения показателей Р/Е и дивидендной доходности по акциям этой компании?*

*P/E = 170 / 70 = 2,429*

*Дивидендная доходность = 40 / 170 = 0,2353 (23,53%)*

***Пример****. Привилегированная акция приносит ежеквартальный доход 250 руб., рыночная цена акции 4500 руб. Найти доходность акции (номинальную процентную ставку при начислении процентов 12 раз в год) считая, что дивиденды по ней не будут меняться и будут выплачиваться достаточно долго.*

*ДД = 250 \* 4 / 4500 = 0,2222 (22,22%)*

***Пример****. Привилегированная акция приносит ежеквартальный доход 250 руб., рыночная цена акции 4500 руб. Найти доходность акции считая, что дивиденды по ней не будут меняться и будут выплачиваться достаточно долго.*

*ДД = 250 / 4500 = 0,05555*

*Годовая эффективная ставка = (1+0,0555)4 - 1 = 0,2414 (24,14%)*

Метод оценки акций с равномерно возрастающим дивидендом (размер дивиденда увеличивается с постоянным темпом прироста) называется моделью Гордона.

**V = D \* (1 + g) / (z – g)**

Где V – стоимость акции; D – величина дивиденда; g – темп прироста дивидендов; z – доходность, равная риску инвестирования в акцию.

***Пример****. По акции компании А был выплачен дивиденд 15 руб. на акцию. Инвестор полагает, что в течение последующих лет темп прироста дивиденда составит 8% в год. Доходность равная риску покупки акции равна 30%. Определить цену акции.*

*V = 15 \* (1 + 0,08) / (0,3 – 0,08) = 73,63руб.*

***Пример****. Курс акции компании А составляет 50 руб., доходность равная риску инвестирования в акцию 17%. На акцию был выплачен дивиденд 5 руб. Определить темп прироста будущих дивидендов, если он предполагается постоянным.*

*V = D \* (1 + g) / (z – g) => V \* z – V \* g = D + D \* g =>*

*g = (V \* z – D) / (V + D) = (50 \* 0,17 – 5) / (50 + 5) = 0,0636 ( 6,36%)*

***Пример****. Доходность равная риску инвестирования в акцию компании А 30%. В течение предыдущих девяти лет по акции выплачивались дивиденды. За этот период дивиденд вырос с 1,2 руб. до 2,5 руб. Предполагается, что темп прироста будущих дивидендов сохранится на том же уровне. Определить курс акции.*

*Сначала необходимо определить темп прироста дивидендов.*

*2,5 = 1,2 \* ( 1 + g)9-1 => g = (2,5 / 1,2) 1/8 – 1 = 0,096*

*V = 2,5 \* (1 + 0,096) / (0,3 – 0,096) = 13,43*

***Пример****. За первый квартал общество выплатило дивиденды из расчета 4 руб. на акцию. В течение года общество планирует увеличивать ежеквартальные дивиденды с темпом роста 3 %. Курсовая стоимость акции общества равна 150 руб. Рассчитайте дивидендную доходность по акции в расчете на год.*

*Дивидендная доходность = (4 + 4\*1,03 + 4\* 1,032 + 4\*1,033) / 150 = 0,1116 (11,16%)*

***Пример****. Инвестор планирует купить акцию компании А и продать ее через два года. Он полагает, что к моменту продажи курс акции составит 150 руб. В конце первого года по акции будет выплачен дивиденд в размере 10 руб., в конце второго – 16 руб. Определить цену акции, если доходность от владения бумагой должна составить 23% годовых.*

*Для решения достаточно продисконтировать дивиденды и стоимость бумаги через 2 года.*

*PV = 10 / (1 + 0,23) + (150+16) / (1 + 0,23)2 = 117,85руб.*

**Рыночная стоимость купонной облигации**

Если К – купон, С – купонная ставка в долях, Н (или FV) – номинал (будущая стоимость), то

К = С\* Н

Рц (или PV) – рыночная стоимость облигации, которая погасится через n лет при ставке сложного процента = r:

**Pц = Н\*((1+С)/(1+r)n +С/(1+r)n-1 +..+С/(1+r))**

r – процентная ставка (доходность по альтернативному вложению), доходность до погашения.

Если все купоны, то можно использовать следующую формулу:

**Pц = С/r + (Н – C/r)\*(1/(1+r)n)**

***Пример****. Рассчитайте рыночную стоимость облигации номиналом 18 000 руб., ставкой выплачиваемого ежегодно купонного дохода 12% и сроком погашения 3 года, если ставка процента по вкладу в банке составляет 14% годовых.*

*Решение: Рц = (18 000 \* 0,12) / 0,14 + (18 000 – 18 000 \* 0,12 / 0,14) \* (1 / (1 + 0,14)3) = 17 164,21*

**Рыночная стоимость бескупонной облигации**

**Pц = Н/(1+r)n**

***Пример.*** *Рассчитайте курсовую стоимость бескупонной облигации номинальной стоимостью 1000 руб., сроком до погашения пять лет, если ее доходность к погашению составляет 11%.*

*Решение: Рп = 100 / (1 + 0,11)5 = 59,35*

***Пример.*** *Рассчитайте доходность к погашению бескупонной облигации номинальной стоимостью 1000 руб., сроком до погашения восемь лет, если ее текущая рыночная цена составляет 65% от номинала.*

*Решение: 65 = 100 / (1 + X)8 => X = 8√ (100 / 65) – 1 = 0,0553 (5,53%)*

**Доходность облигации**

ТД – Текущая доходность (При расчете учитывается только годовой купонный доход).

**ТД = К / Pц**

***Пример.*** *Текущая доходность облигации с купонной ставкой 10% годовых и рыночной стоимостью 75% равна:*

*Решение: ТД = 10 / 75 = 0,1333 (13,33%)*

ДП – доходность к погашению (При расчете учитывается годовой купонный доход и среднегодовой дисконт).

**ДП = (К + (Н – Pц) / n) / Pц**

***Пример****. Рассчитайте простую доходность к погашению облигации с годовой купонной ставкой 10%, сроком погашения 3 года и рыночной стоимостью 75% от номинала.*

*Решение: ДП = (10 + (100 – 75) / 3) / 75 = 0,2444 (24,44%)*

Тема 19.3 Основы **теории вероятностей и математической статистики.** **Управление портфелем**

Под случайным событием в теории вероятности понимается некоторый факт, который характеризуется следующими признаками:

* Может наблюдаться неоднократно
* Нельзя с полной определенностью утверждать - произойдет он в очередной раз или нет.

Виды случайных событий:

* Единственно возможные события - появление в результате испытания одного и только одного из них является достоверным событием. Очевидно, единственно возможные события попарно несовместны. (Куплены два лотерейных билета. Обязательно произойдет одно и только одно из четырех событий: 1-выиграл, 2-не выиграл; 1-не выиграл, 2- выиграл; оба выиграли; оба не выиграли).
* Полной группой называют совокупность единственно возможных событий испытания (Попадание, промах).
* Дополнительными (Противоположными) называют два единственно возможных события, образующих полную группу.
* Несовместные события - появление одного из них исключает появление других событий в одном испытании. (Из ящика извлекают стандартную или нестандартную деталь, решка и герб монеты).
* Независимые события - появление одного события никак не связано с появлением другого.

Обозначение событий и операций с событиями:

* Х\*У – произведение событий Х и У – это событие Х\*У, состоящее в совместном появлении (совмещении) событий Х и У.
* Х + У – сумма событий Х и У - это событие, заключающееся в том, что произошло хотя бы одно из событий или произошли оба события.

Вероятностью события А - Р(Х) - называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов (м) к общему числу всех единственно возможных и равновозможных элементарных исходов испытания(п).

Р(Х) = м / п

Вероятность достоверного события = 1; Р(Х) = м / п = п / п = 1

Вероятность невозможного события = 0; Р(Х) = м/п = 0 / п = 0

Вероятность случайного события: 0 ≤ Р(Х) ≤ 1

Вероятность случайных событий характеризуется следующими свойствами:

* Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий. Р(Х\*У) = Р(Х) \* Р(У) Вероятность совместного появления событий Х и У.
* Р(Х\*У) = 0, если Х\*У – невозможно, т.е невозможно совместное появление событий Х и У.

Для дополнительных событий Р(Х\*У) = 0.

* Р(Х + У) = Р(Х) + Р(У) – Р(ХУ). Вероятность появления хотя бы одного из событий Х и У или их совместного появления.

Для дополнительных событий Р(Х + У) = 1

* Если Х\*У – невозможное событие, то Р(Х +У) = Р(Х) + Р(У). Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий.
* Вероятность полной группы = 1 и состоит из вероятностей событий, входящих в полную группу.

Пусть А, В, С - события, входящие в полную группу. Тогда Р(А) + Р(В) + Р(С) = 1

* Р(Х⏐У) = Р(Х\*У) / Р(У). Р(Х⏐У) - Условная вероятностью события Х при условии, что произошло событие У.

***Пример.*** *Документы профессионального участника пронумерованы от 1 до 30. Какова вероятность того, что случайно будет открыт документ с номером, кратным 5?*

*Решение: Документов с номером, кратным 5 = 6 (5,10,15,20,25,30). Вероятность того, что случайно будет открыт документ с номером, кратным 5 = 6 / 30 = 1/5 = 0,2*

***Пример.*** *Рассматривается деятельность 30 компаний, 10 из которых имеют Советы директоров. Какова вероятность того, что выбранные случайно 3 компании имеют Совет директоров?*

*Решение: Вероятность совместного появления трех* ***независимых*** *событий равна произведению вероятностей этих событий. Р = (10/30)\*(9/29)\*(8/28) = 720 / 24360 = 0,02956 = 0,03*

***Пример.*** *Даны следующие вероятности роста доходности акций компаний «А», «В» и «С»: Р(А)=0,8; Р(В)=0,7; Р(С)=0,9. Какова вероятность того, что вырастет доходность акций хотя бы одной компании?*

*Решение: Найдем вероятность того, что ни одна акция не вырастет. Предполагается, что доходности акций независимы. Тогда Р(-А\*-В\*-С) = (1 – 0,8) \* (1 – 0,7) \* (1 – 0,9) = 0,006.*

*Искомая вероятность тогда равна 1 – 0,06 = 0,994*

Дискретной (прерывной) называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями. Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным и бесконечным.

Законом распределения дискретной случайной величины называют соответствие между возможными значениями и их вероятностями. Его можно задать таблично, аналитически (в виде формулы), графически.

Непрерывной называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Число возможных значений непрерывной случайной величины - бесконечно. Ее функция распределения непрерывна и почти везде имеет производную. Непрерывная случайная величина может иметь нормальное, равномерное и логнормальное распределение. Нормальная случайная величина полностью описывается своими математическим ожиданием и дисперсией.

**Математическим ожиданием** дискретной случайной величины называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятность. Матожидание приближенно равно (тем точнее, чем больше число испытаний) среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины.

**М(Х) = ∑i Х i\* Р(Х i)**

***Пример.*** *Пусть распределение вероятности доходности некоторого актива за один период выглядит следующим образом:*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Доходность* | *0,25* | *0,1* | *- 0,1* | *0,03* | *-0,06* |
| *Вероятность* | *0,1* | *0,2* | *0,3* | *0,3* | *0,1* |

*Какова ожидаемая доходность этого актива за один период?*

*М(Х) = 0,25 \* 0,1 + 0,1 \* 0,2 + (-0,1) \* 0,3 + 0,03 \* 0,3 + (-0,06) \* 0,1 = 0,018 (1,8%)*

Матожидание числа появления события в одном испытании равно вероятности этого события М(Х) = Р(Х). Матожидание числа появления события в **n** испытаниях: **М(Х) = n\*Р(Х)**, гдеР(Х) - вероятность появления в каждом испытании.

Свойства математического ожидания:

* Матожидание постоянной величины равно самой постоянной. М (С) = С.
* Постоянный множитель можно выносить за знак матожидания М (С\*Х) = С\*М (Х).
* Матожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их матожиданий. М (Х\*У) = М (Х) \* М (У).
* Матожидание суммы (разности) двух случайных величин равно сумме (разности) их матожиданий. М (Х ± У) = М (Х) ± М (У).

***Пример.*** *Пусть Х и Y - случайные величины, М - математическое ожидание, М(Х)=3; М(Y)=5.*

*Найти М(8Х - 3Y).*

*Решение: М(8\*3 – 3\*5) = 24 – 15 = 9*

***Пример.*** *Даны 3 актива. Известно, что ожидаемая доходность первого актива X = 25%, ожидаемая доходность второго актива Y = 40%. Определить ожидаемую доходность актива Z, если известно, что Z=23X-15Y+75.*

*Решение: M(Z) = 23 \* M(X) – 15 \* M(Y) + 75 = 50*

Отклонением называют разность между случайной величиной и ее матожиданием = X – M (X)

**Дисперсией** (рассеянием) дискретной случайной величины называют матожидание квадрата отклонения случайной величины от ее матожидания.

**D(X) = М [Х – М (Х)] 2**.

Нормально распределенная случайная величина попадает в любой интервал **[М (Х) ± отклонение]** с какой-то вероятностью. Вероятность точного значения случайной величины равна нулю, так как можно говорить только о вероятности попадания величины в тот или иной **интервал** отклонений от матожидания.

**Средним квадратичным отклонением** случайной величины Х называют квадратный корень из дисперсии **σ (Х) = √ D(X)**.

***Пример.*** *Доходность актива за 3 года представлена в таблице:*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *Годы* | *1* | *2* | *3* |
| *Доходность (%)* | *10* | *14* | *18* |

*Определить риск актива, представленный показателями выборочной дисперсии и стандартного отклонения доходности.*

*Решение:*

*Мат. Ожидание = (10 + 14 + 18) / 3 = 14*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *Годы* | *1* | *2* | *3* |
| *Квадрат отклонения* | *=(10 – 14)2 = 16* | *= (14 – 14)2 = 0* | *= (18 – 14)2 = 16* |

*Дисперсия = (16 + 16) / 3 = 10,67%*

*Стандартное отклонение = √10,67 = 3,27%*

При **нормальном** распределении **P ( | X – M(X) | < σ ) = 68,3 %**

**P ( | X – M(X) | < 2σ ) = 95,4 %**

**P ( | X – M(X) | < 3σ ) = 99,7 %**

***Пример.*** *Доходность акции А распределена нормально. Среднее значение доходности равно 40% годовых, стандартное отклонение доходности в расчете на год равно 10%. Определить, с какой вероятностью через год доходность акции может оказаться в диапазоне от 10% до 70%.*

*Решение: Диапазон [10;70] соответствует M(X) ± 3\*σ (40 ± 3 \* 10). Этому диапазону соответствует вероятность 99,7%*

***Пример.*** *Доходность акции А распределена нормально. Среднее значение доходности равно 30% годовых, стандартное отклонение доходности в расчете на год равно 15%. Определить, с какой вероятностью через год доходность акции составит 40%.*

*Решение: Вероятность того, что непрерывная случайная величина примет конкретное значение равна 0%.*

**Свойства дисперсии:**

* Дисперсия постоянной величины **С** равна нулю. **D (С) = 0**.
* Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат **D(С\*Х)=С 2 \* D (Х)**.
* Дисперсия суммы (разности) двух **независимых** случайных величин равна сумме дисперсий этих величин. **D (Х** ± **У)= D (Х) + D (У)**.
* Дисперсия суммы двух **НЕ независимых** (т.е. зависимых) случайных величин равна сумме дисперсий этих величин и двух ковариаций. **D (X + У) = D (Х) + D (У) + 2К (Х, У)**

***Пример.*** *Случайные величины Х и У независимы. Дисперсии величин D(Х)=5 и D(У)=9. Найти дисперсию случайной величины Z=2Х-У+5.*

*Решение: Так как случайные величины независимы, то D(2Х-У+5) = D(2X) + D(У) + D(5) = 4\*D(Х) + D(У) + 0 = 29*

***Пример.*** *Пусть Х и Y - случайные величины, D - дисперсия случайной величины, К - ковариация, D(Х)=0,5, D(Y)=1,5, К(Х,Y)= -0,5. Найти D(Х + Y).*

*Решение: D(Х + Y) = D(X) + D(Y) + 2 K(X,Y) = 0,5 + 1,5 - 2 \* 0,5 = 1*

***Пример.*** *Пусть Х - случайная величина, М - математическое ожидание, D - дисперсия случайной величины, М(Х)=2, D(Х)=0. Найти М(X3- 1).*

*Решение: Если дисперсия = 0, значит Х – это константа, равная 2 (так как M(X) = 2).*

*Стало быть М(X3- 1) = M(23 – 1) = 7*

***Пример.*** *Пусть Х - случайная величина, М - математическое ожидание, D - дисперсия случайной величины, М(Х)=2, D(Х)=2. Найти М(Х3 - 1).*

*Решение: Так как дисперсия ≠ 0, значит Х – это случайная величина, и ничего о поведении Х3, зная только мат. ожидание и дисперсию, мы сказать не можем. Таким образом, указанных данных недостаточно для решения задачи.*

**Ковариация** случайных величин Х и У (корреляционный момент) – **К (Х, У)** – это матожидание произведений отклонений эти величин. **К (Х, У) = М [(Х – М (Х)) \* (У – М (У))]**.

Ковариация двух независимых случайных величин = 0.

**К (Х, У) = 1/n \* [(Х1 – М (Х))\* (У1 – М (У)) + (Х2 – М (Х))\* (У2 – М (У)) + ….+ (Хn – М (Х))\* (Уn – М (У))]**

**Коэффициент корреляции kх,у** случайных величин Х и У - отношение ковариации случайных величин к произведению средних квадратичных отклонений этих величин.

**k (Х, У) = К(Х, У) / ( σ (Х) \* σ (У) ) -1 ≤ k (Х,У) ≤ 1.**

Если k (Х,У) < 0, то Х и У будет изменяться в противоположных направлениях. Если k (Х,У) > 0, то Х и У будет изменяться в одном направлении. Для независимых случайных величин k = 0.

Если k (Х,У) = ± 1, то одна из случайных величин является линейной функцией от другой, Х = ± аУ + в.

Если k (Х,У) = + 1, то прямо пропорциональная зависимость, например, Х = 2У + 3.

Если k (Х,У) = – 1, то обратно пропорциональная зависимость, например, Х = – 2У + 3.

***Пример.*** *Стандартное отклонение доходности первого актива равно 32%, второго – 41%, ковариация доходностей активов 435. Определить коэффициент корреляции доходностей активов.*

*Решение: kx,y = 435 / (32 \* 41) = 0,332*

***Пример.*** *Пусть Х - случайная величина, D - дисперсия случайной величины, D(X)=1 и Y =- 2Х + 1. Коэффициент корреляции X и Y равен*

*Решение: Между величиной X и Y обратная линейная зависимость. Стало быть коэффициент корреляции = -1.*

***Пример.*** *Стандартное отклонение доходности первого актива равно 25%, второго – 34%, коэффициент корреляции между доходностями активов 0,65. Определить ковариацию доходностей активов.*

*Решение: 0,65 = K(X,Y) / (25 \* 34) => K(X,Y) = 0,65 \* 25 \* 34 = 552,5*

***Пример.*** *Стандартное отклонение доходности первого актива равно 8%, второго – 24%. Может ли ковариация доходностей быть равной минус 211,2.*

*Решение: минимальное значение корреляции = -1. Стало быть минимальное значение ковариации = -1 \* 8 \* 24 = -192. Меньше (то есть, например -211,2) ковариация быть не может.*

***Пример.*** *Доходности акций А и В могут принимать только два значения, как показано в таблице:*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | *Доходность А* | *Доходность В* |
| *1-й сценарий* | *5%* | *10%* |
| *2-й сценарий* | *8%* | *16%* |

*Определить коэффициент корреляции доходностей акций.*

*Решение: Между активом А и В прямая зависимость. Так как дано только два сценария, то очевидно, что зависимость линейная. Стало быть, корреляция = 1*

***Пример.*** *Доходности акций А и В могут принимать только два значения, как показано в таблице:*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | *Доходность А* | *Доходность В* |
| *1-й сценарий* | *5%* | *10%* |
| *2-й сценарий* | *8%* | *10%* |

*Определить коэффициент корреляции доходностей акций.*

*Решение: Между активом А и В нет зависимости (доходность А меняется, а В – нет). Стало быть, корреляция = 0*

**Доходность и риск портфеля**

Эффективность управления портфелем оценивается на основе данных о риске (стандартном отклонение доходности) и доходности портфеля.

Если в портфель инвестируются средства на определенный период времени, например, несколько месяцев или лет, то его доходность за данный период определяется по формуле:

**rp = (Pn – Pо) / Pо = (Pn / Pо) – 1,** где

rp –доходность портфеля за период.

Pn – стоимость портфеля (стоимость всех активов) в конце периода.

Pо – стоимость портфеля в начале периода.

Для удобства сравнения с другими портфелями показатель доходности за период обычно пересчитывают в расчете на год и выражают в % годовых.

**rp = ((Pn – Pо) / Pо)\*(12 / n)\*100,**

где n – продолжительность периода в месяцах.

Чтобы перевести доходность в годовую и получить эффективный процент, можно использовать следующее соотношение:

**(1 + rгод) = (1 + rп/год)2 = (1 + rкв)4 = (1 + rмес)12**

***Пример****. Менеджер управлял портфелем в течение трех месяцев. В начале периода в портфель инвестировали 60 млн. руб. Через три месяца его стоимость выросла до 80 млн. руб. Определить доходность управления портфелем из задачи в расчете на год на основе простого и эффективного процента.*

*rр = (80 - 60) / 60 = 0,33. Но это трехмесячная доходность.*

*Эффективная доходность (1 + rгод) = (1 + 0,33)4 => rгод = 1,334 – 1 = 2,16 (216%)*

*Простая доходность (1 + rгод) = (1 + 0,33 \* 4) => rгод =1,32 (132%)*

***Пример****. Менеджер управлял портфелем в течение 100 дней. В начале периода в портфель инвестировали 60 млн. руб. Через три месяца его стоимость выросла до 80 млн. руб. Определить доходность управления портфелем из задачи в расчете на год на основе простого и эффективного процента.*

*rр = (80 - 60) / 60 = 0,33. Но это стодневная доходность.*

*Эффективная доходность (1 + rгод) = (1 + 0,33)365/100 => rгод = 2,858 – 1 = 1,858 (185,8%)*

*Простая доходность (1 + rгод) = (1 + 0,33 \* 365 / 100) => rгод =1,22 (122%)*

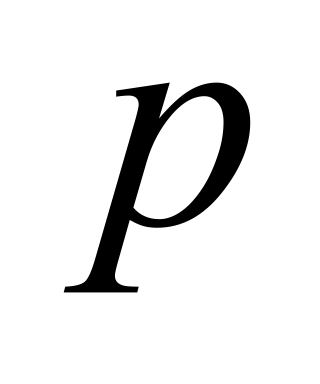
При формировании портфеля ожидаемая доходность может рассчитываться по формуле:

**r = Σ ri\*сi** ,

**r** – ожидаемая доходность портфеля за период.

**ri** – ожидаемая **i**-го актива за тот же период.

**сi** – удельный вес **i**-го актива.

***Пример.*** *Прогноз инвестора относительно возможных сценариев доходности акций компаний А и В с учетом их вероятностей  в следующем периоде представлен в таблице:*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | *rB=10%* | *rB=20%* |
| *rA =10%* | *p1=20%* | *P3=30%* |
| *rA=40%* | *p2=40%* | *P4=10%* |

*Определить ожидаемую доходность портфеля, если уд. веса акций А и В в портфеле составляют соответственно 30% и 70%.*

*r = 0,3 \* (10 \* (0,2 + 0,3) + 40 \* (0,4 + 0,1)) + 0,7 \* (10 \* (0,2 + 0,4) + 20 \* (0,3 + 0,1)) = 17,3%*

***Пример.*** *Для формирования портфеля инвестор использовал собственные средства и также получил кредит сроком на год в размере 300 тыс. руб. под 10% годовых. Инвестор приобрел акции двух видов: акции А на сумму 400 тыс. руб. с ожидаемой доходностью 20% и акции В на сумму 500 тыс. руб. с ожидаемой доходностью 29%. Определить ожидаемую доходность портфеля инвестора за год.*

*Стоимость портфеля = 400 + 500 – 300 = 600тыс. руб.*

*Доля cA = 400 / 600 = 0,6667*

*Доля cВ = 500 / 600 = 0,8333*

*Доля cЗ (займ) = 300 / 600 = - 0,5*

*Доходность портфеля = 0,6667 \* 0,2 + 0,8333 \* 0,29 – 0,5 \* 0,1 = 0,325 (32,5%)*

Стандартное отклонение **(риск) портфеля из 2-х активов** определяется как:

σ = √ (с1\*σ1)2 + (с2\*σ2)2 + 2 \* с1\*с2\*К12

с1 и с2 – удельный вес i-го актива.

σ1 и σ2 – стандартные отклонения доходности активов.

К12 – ковариация между активами 1 и 2.

***Пример.*** *Определить риск портфеля, состоящего из акций компаний А и В, если удельный вес актива А в портфеле – 0,4, удельный вес актива В в портфеле – 0,6. Стандартное отклонение доходности акции А – 20%, стандартное отклонение доходности акции В – 30%, ковариация доходностей активов А и В – 120.*

*Решение: σ = √ (0,4 \* 20)2 + (0,6 \* 30)2 + 2 \* 0,4 \* 0,6 \* 120 = 445,6*

***Пример.*** *Портфель инвестора составлен из акций А и В. Удельные веса акций А и В в портфеле составляют соответственно 50% и 50%. Дисперсия доходности акции А равна 400, дисперсия доходности акции B равна 484, ковариация доходностей А и B равна 264. Какова дисперсия доходности портфеля?*

*Решение: D = 0,52 \* 400 + 0,52 \* 484 + 2 \* 264 \* 0,5 \* 0,5 = 353*

**Скользящие средние**

Простая скользящая средняя – рассчитывается как среднее арифметическое цен, входящих в период усреднения.

SMA t = (Pt + Pt – 1 + … + Pt – n) / n, где

MA t – значение простой скользящей средней в день t.

Pt – значение цены в день t.

n – период усреднения.

***Пример.*** *За последние семь дней торгов значения фондового индекса составили 13, 12, 10, 13, 14, 16, 17. Значение 5-дневной простой скользящей средней для последнего дня торгов:*

*(10 + 13 + 14 + 16 + 17) / 5 = 14*

Взвешенная скользящая средняя – каждому последующему значению цены в базе придается больший вес, чем предыдущему.

WMA t = (n Pt + (n – 1)Pt – 1 + … + Pt – n) / (1 + …+ (n – 1) + n)

***Пример.*** *В течение последних шести дней торгов цена акций компании XYZ последовательно принимала значения 9, 8, 7, 5, 8, 10. Значение 4-дневной взвешенной скользящей средней для шестого дня торгов: (7\*1 + 5\*2 + 8\*3 + 10\*4) = 8,1*

**Коэффициент бета**

Коэффициент "бета" характеризует изменчивость цены ценной бумаги по отношению к индексу рыночных цен. Коэффициент "бета" измеряет чувствительность доходности акции (портфеля акций) к изменению доходности портфеля акций, составляющих индекс рынка. Это мера неустойчивости (изменчивости) цены акций компании по отношению к рынку в целом.

**βi = (ri – ro) / (rp – ro); βi = кi,p\*σi / σр**, **βi = Кi,p / σ2р** где

**βi** – коэффициент бета конкретного актива.

**ro** – доходность безрискового актива (вложения).

**ri** – средняя доходность конкретного актива.

**rp** – средняя доходность по рынку за тот же период.

**кi,p**– корреляция между доходностью конкретного актива и доходностью на рыночный индекс.

**Кi,p**– ковариация доходности актива и доходности на рыночный индекс.

**σi** – стандартное отклонение доходности конкретного актива.

**σр** – стандартное отклонение доходности по рынку за тот же период.

***Пример.*** *Стандартное отклонение доходности рыночного индекса равно 27%, доходности акции компании* ***А*** *– 25%, коэффициент корреляции между доходностями рыночного индекса и акции* ***А*** *составляет 0,7. Определить коэффициент бета акции* ***А*** *относительно рыночного индекса.*

*βi = 0,7 \* 25 / 27 =0,648*

Коэффициент бета портфеля определяется как средневзвешенная бета активов, входящих в портфель.

**β = ∑ сi \* βi**

где **сi –** доля i-го актива;  **βi  -** бета i-го актива.

***Пример.*** *Портфель состоит из акций компаний* ***А****,* ***В*** *и* ***С****. Удельные веса активов в портфеле и беты акций относительно рыночного индекса равны: θА = 0,3, θВ = 0,3, θС = 0,4, βА = 0,7, βВ = 1,1 и βС = 1,2. Определить бету портфеля.*

*β = 0,3 \* 0,7 + 0,3 \* 1,1 + 0,4 \* 1,2 = 1,02*